Büyüme Eğrilerinde Polinomsal Yaklaşımın Kullanılması

The Polynomial Approach in Growth Curves

Mehmet GÜRCAN,[a]
Cemil ÇOLAK[a]

[a]İstatistik Bölümü,
Fırat Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi,
Elazığ

Geliş Tarihi/*Received:* 08.06.2009
Kabul Tarihi/*Accepted:* 02.09.2009

Yazışma Adresi/*Correspondence:*
Mehmet GÜRCAN
Fırat Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi,
İstatistik Bölümü, Elazığ,
TÜRKİYE/TURKEY
mgurcan@firat.edu.tr

ÖZET Amaç: Çalışmada büyüme eğrileri olarak adlandırılan genelde iki asimptot doğru arasına sıkıştırılmış eğrilerin polinomsal fonksiyonlarla incelenmesi amaçlanmıştır. **Gereç ve Yöntemler:** İncelemede kullanılacak olan yöntem Bernstein polinomlarının sürekli bir fonksiyona yaklaşım yöntemidir. **Bulgular:** Yöntem, büyüme eğrileri ile ilgili kuramsal bir örnek ile açıklanmıştır. Uygulanan yöntem büyüme eğrileri olarak bilinen eğri sınıfında veri sayısına bağlı olarak bilinen yöntemlerden daha minimum hatayla gerçek değerleri tahmin edebilmektedir. **Sonuç:** Kullanılan yöntem bilinen yöntemlerden daha düşük hata vermesinin yanı sıra, tahmin değerleri için güven aralıkları oluşturabilmektedir. Bu ise istatistiksel analizde önemli bir bulgu olup tahmin değerinin geçerliliğini istatistiksel anlamda desteklemektedir.

Anahtar Kelimeler: Büyüme eğrileri, S-eğrisi, büyüme modeli, Bernstein polinomu

ABSTRACT Objective: This study aimed to investigate the growth curves which are usually compressed between two asymptote lines with polynomial functions. **Material and Methods:** The method used is the approach of Bernstein polynomials to a continuous function. **Results:** The method related to growth curves is explained with an hypothetic example. The applied method known as growth curves methods can estimate the actual values with more minimum error than other methods, which depends on the number of data. **Conclusion:** As well as the applied method gives lower error than the known methods, the confidence intervals for the estimates can be obtained. This finding is important in statistical analysis and supports the validity of estimates in statistical significance.

Key Words: Growth curves, S-curve, Growth model, Bernstein polynomial

Turkiye Klinikleri J Biostat 2009;1(2):54-8

Genel olarak büyüme eğrileri büküm noktasının olup olmamasına göre iki sınıfa ayrılabilir. Şayet büyüme eğrisi büküm noktasına sahipse *S*-eğrisi olup belli bir noktaya kadar artan eğime sahip olacak büküm noktasından sonra azalan bir eğim gösterecektir. Büyüme eğrisi büküm noktasına sahip değil ise başlangıçtan itibaren azalan bir eğime sahip olacaktır. Bu tip büyüme eğrilerinde başlangıçta eğrinin eğimi maksimum olup ilerleyen değerler için gittikçe sıfıra yaklaşır. Her iki tip büyüme eğrisi de artan değerlere karşılık üst sınırda bir asimptota sahip olacaktır. Ancak büküm noktasına sahip olan bir büyüme eğrisi alt sınırda da bir asimptota sahip olur. Büyüme eğrilerinde eğrinin belli zaman dilimindeki değerleriyle ilgilenildiğinden analizlerde bu asimptot değerleri dikkate alınmamaktadır.

Buna karşılık asimptot değerleri eğrinin büküm noktasını ve azalan eğime sahipse eğimin azalma hızını etkilediğinden oldukça önemlidir. Büyüme eğrileri ilk olarak 1845'li yıllarda toplumdaki nüfus artışının incelenmesi için kullanılmıştır. Bu incelemede aranan matematiksel model zamana bağlı olacağından $t > 0$ değişkenine bağlı olan bir $u(t)$ fonksiyonu ve bunun eğimini gösteren $u'(t)$ fonksiyonundan oluşmaktadır. Bu iki fonksiyon birbirlerine çeşitli şekillerde eşitlenerek çözümleri araştırılmış ve bu çözümler sonucunda çeşitli *S*-eğrileri elde edilmiştir. Bu tipli incelemelerin en genel şekli aşağıdaki diferansiyel denklemde birleştirilebilir:[1]

$$u'(t) = g(u(t))[h(\alpha) - h(u(t))]. \qquad (1)$$

Burada h ve g fonksiyonları $g(0) = h(0) = 0$ eşitliğini sağlayacak şekilde seçilen artan fonksiyonlardır. Denklemde yer alan t zaman değişkeni, α ise asimptotik değerdir.

Buna ilaveten $t \to \infty$ ve $t \to -\infty$ için $u'(t) \to 0$ özelliği sağlanmalıdır. Şimdi (1) denkleminde verilen fonksiyonları özel olarak belirleyerek bilinen büyüme eğrilerinden bazılarının nasıl elde edilebileceğini gösterelim. İlk olarak (1) denkleminde ilgilenilen fonksiyonlar aşağıdaki gibi seçilsin:

$h(u) = \ln u$, $g(u) = cu$

Bu durumda diferansiyel denklem:

$$u'(t) = c\,u(t)\ln(\alpha / u(t)) \ , \ c > 0, \alpha > 0$$

biçiminde olacaktır.

Bu diferansiyel denklemin çözümünden aşağıdaki Gompertz büyüme eğrileri elde edilir:

$$u(t) = \alpha \ \exp[-C\exp(-ct)]$$

Burada $C \in R$ diferansiyel denklemin çözümünden bulunan integral sabitidir. İkinci olarak ilgilenilen fonksiyonlar:

$$h(u) = u^{1-m}, \ g(u) = (1-m)^{-1} u^{m}$$

formunda olsunlar. Bu durumda diferansiyel denklem:

$$u'(t) = c(1-m)^{-1} u^{m} (\alpha^{1-m} - u^{1-m})$$

biçiminde elde edilir.

Bu denklemin çözümünden aşağıdaki Von Bertalanffy büyüme eğrileri elde edilir:

$$u(t) = [\alpha^{1-m} - C\exp(-ct)]^{1/(1-m)}$$

Bu modelde α, C, c, $m \in R$ reel sabitler olmak üzere dört adet parametre bulunmaktadır. $m = 2$ ve $C = 1/\alpha$ olarak seçildiğinde model bilinen lojistik modele indirgenecektir. Üçüncü olarak ilgilenilen fonksiyonlar:

$$h(u) = u^{m-1}, \ g(u) = c\,(m-1)^{-1} \alpha^{1-m} u$$

biçiminde olsunlar. Bu durumda;

$$u'(t) = c(m-1)^{-1} \alpha^{1-m} u(\alpha^{m-1} - u^{m-1})$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümünden;

$$u(t) = C^{ct/(m-1)} [\alpha^{m-1} - u^{m-1}]^{1/(m-1)}, \quad m \neq 1$$

biçimindeki Richard büyüme eğrileri elde edilir. Aynı zamanda bu eğri;

$$u(t) = \alpha \ [1 + C\exp(-ct)]^{1/(m-1)}$$

biçiminde de düzenlenebilir.

Bu büyüme eğrilerinin tamamında ortak olan nokta aynı diferansiyel denklemin çözümünden elde edilmiş olmalarının yanı sıra tümünün büküm noktasına sahip olmasıdır.

VERİ YAPISI

Çalışmada Bernstein polinomlarının sürekli fonksiyonlara yaklaşımı yöntemi kullanılacağından veri yapısı Bernstein polinomununun oluşturulabilmesine uygun olmalıdır. Şöyle ki Bernstein polinomu [0,1] aralığında tanımlı bir polinom olduğundan büyüme eğrilerinin gözlem değerleri bu aralıkta sıkıştırılmış ve eşit aralıklı olmalıdır. Aynı zamanda büyüme eğrisinin aldığı değerlerin üst sınırının yani eğrinin asimptotunun ne olduğu da önemlidir. Şayet araştırmacının ilgilendiği durum büyüme eğrisinin belli zaman dilimi içerisindeki gözlem değerleri ise eksen değiştirmeye gerek duyulmaksızın eldeki gözlem değerleri yardımıyla hesaplamalar yapılabilir. Ancak araştırmacının ilgilendiği durum büyüme eğrisinin tamamını gözlemleyebilmek ise bu durumda eksen değiştirmesi yaparak polinom değerleri ile polinom değişkenlerinin eksenlerini değiştirmesi gerekmektedir. n-inci dereceli bir Bernstein polinomu aşağıdaki eşitlikle tanımlanır:[2,3]

$$Ef(S_n/n) = \sum_{k=0}^{n} f(k/n)\; C(n,k)\; x^k (1-x)^{n-k}, \quad n = 1,2,\ldots \qquad (2)$$

Burada $f \in C\,[0,1]$ ve S_n, (n,k) parametreli binom dağılımına sahip rastgele değişkendir. Bu polinomun en önemli özelliği her bir $f \in C\,[0,1]$ için düzgün yakınsamasıdır,

$$Ef(S_n/n) \to f(x), \quad n \to \infty$$

Dikkat edilecek olursa lojistik büyüme eğrisinde $y \in [0,1]$ için Bernstein polinomu da $x \in [0,1]$ aralığında yer almaktadır. Her iki eğrinin de bu benzer özelliğini kullanarak lojistik büyüme eğrisini Bernstein polinomu yardımıyla oluşturmak lojistik büyüme eğrisinde parametre tahmini için önemli bir yöntemdir. Bu gibi yöntemlerden bazıları çeşitli araştırmacılar tarafından incelenmiştir.[7-11]

POLİNOMUN OLUŞTURULMASI

Tahmin denklemi (2) eşitliğinde verildiği gibi olmak üzere n-inci dereceden bir polinom olan model denklemi oluşturulacaktır. Kolaylık olması bakımından bunun için öncelikle polinomun katsayıları hesaplansın. İlk önce k=0,1,...,n için $C(n,k)\eta_k$, $\eta_k = f(k/n)$ çarpımları sıralansın. Daha sonra;

$$C^+(n)' = [C(n,0), -C(n,1), \ldots, C(n,n)]$$

veya

$$C^-(n)' = [-C(n,0), C(n,1), \ldots, C(n,n)]$$

vektörünü *n sayısının* çift veya tek olmasına göre bu çarpımlardan ilki olan $C(n,0)\eta_0$ çarpımının altına bir sütun vektörü şeklinde yerleştirilsin. Bu işlem her bir çarpım için yapıldığında sırasıyla $C(n,1)\eta_1$ çarpımının altında $C(n-1)'$ sütun vektörü ve son olarak da $C(n,n)\eta_n$ çarpımının altında $C(0)'=[C(0,0)]=1$ sayısı yer alacaktır. Bu işlemin sonunda aşağıdaki şema elde edilebilir:

$$\begin{array}{ccc} C(n,0)\eta_0 & C(n,1)\eta_1 & \ldots & C(n,n)\eta_n \\ \begin{bmatrix} C(n,0) \\ -C(n,1) \\ \vdots \\ \\ C(n,n) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -C(n-1,0) \\ C(n-1,1) \\ \vdots \\ C(n-1,n-1) \\ 0 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (3)$$

Bu işlemler tamamlandıktan sonra her bir vektörün birinci elemanı ile kendisine ait olan $C(n,k)\eta_k$ katsayısını çarparak toplayalım. Sonuçta elde edilen çarpımlar toplamı modelde x^n teriminin katsayısı olacaktır. Bezer yolla her bir vektörün ikinci elemanı ile aynı işlem tekrarlandığında elde edilen sayı x^{n-1} teriminin katsayısı olacaktır. Dolayısıyla işlem tamamlandığında elde edilen polinom şeklindeki tahmin denklemi aşağıdaki formda olur:

$$\hat{A}(x) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-j} C(n-k, j)\, C(n,k)\, \eta_k\, x^{n-j}. \qquad (4)$$

Elde edilen bu algoritma bu tipli modellerde tahmin denkleminin oluşturulmasında büyük ölçüde kolaylık sağlamaktadır.

ÖRNEK

İncelenen hipotetik örnekte belli bir zaman diliminde eşit aralıklı olarak büyüme eğrisine ait olan 18 adet değer gözlemlenmiş olsun. Gözlem vektörü aşağıdaki gibi olmak koşuluyla (4) eşitliğinde verilen tahmin denklemini oluşturmaya çalışalım:

Y = (0.4; 0.5; 1; 1.5; 2; 2.8; 3; 3.1; 3.5; 4; 4.8; 5; 5.7; 6.5; 7.3; 7.38; 7.51; 7.58)

Bu veriler yardımıyla (3)'de verilen şemanın hesaplanmış hali Tablo 1'de devriği alınmış şekilde verilmiştir.

Bu durumda polinom katsayıları Tablo 2'de gösterildiği şekilde elde edilir.

Elde edilen polinomdan bulunan tahmin değerleri aşağıdaki şekilde olacaktır:

$\hat{Y}$ = (0.4; 0.6; 1.05; 1.5; 2.02; 2.4; 2.9; 3.3; 3.7; 4.1; 4.4; 4.5; 4.9; 5.69; 6.51; 7.28; 7.37; 7.58)

Bu durumda açıklanan yöntemden elde edilen hata kareler toplamı 0.487 olarak bulunabilir. Hata kareler toplamı, Lojistik modeli için 1.39, Gompertz modeli için 1.19, Richards modeli için 1.13 ve Monomoleküler modeli için ise 1.25 olarak hesaplanmıştır. Açıklanan yöntemden elde edilen hata kareler toplamı, diğer dört doğrusal olmayan modelden daha küçüktür.

TARTIŞMA

Bu çalışma, büyüme eğrilerine bir alternatif sunmaktadır. Burada polinomsal fonksiyonlarla elde edilen tahmin denklemleri ile kestirimler yapıla-

TABLO 1: Polinom katsayıları için hazırlanmış şema.

0.4	**8.5**	**136**	**1020**	**4760**	**17326.4**	**37128**	**60288.8**		
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1		
17	-16	15	-14	13	-12	11	-10		
-136	120	-105	91	-78	66	-55	45		
680	-560	455	-364	286	-220	165	-120		
-2380	1820	-1365	1001	-715	495	-330	210		
6188	-4368	3003	-2002	1287	-792	462	-252		
-12376	8008	-5005	3003	-1716	924	-462	210		
19448	-11440	6435	-3432	1716	-792	330	-120		
-24310	12870	-6435	3003	-1287	495	-165	45		
24310	-11440	5005	-2002	715	-220	55	-10		
-19448	8008	-3003	1001	-286	66	-11	1		
12376	- 4368	1365	-364	78	-12	1	0		
-6188	1820	-455	91	-13	1	0	0		
2380	-560	105	-14	1	0	0	0		
-680	120	-15	1	0	0	0	0		
136	-16	1	0	0	0	0	0		
-17	1	0	0	0	0	0	0		
1	0	0	0	0	0	0	0		
85085	**97240**	**93350.4**	**61880**	**35271.6**	**15470**	**4964**	**1003.68**	**127.67**	**7.58**
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
9	-8	7	-6	5	-4	3	-2	1	0
-36	28	-21	15	-10	6	-3	1	0	0
84	-56	35	-20	10	-4	1	0	0	0
-126	70	-35	15	-5	1	0	0	0	0
126	-56	21	-6	1	0	0	0	0	0
-84	28	-7	1	0	0	0	0	0	0
36	-8	1	0	0	0	0	0	0	0
-9	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

bilmektedir. Kestirimlerin istatistiksel geçerliliğinin kontrolünde yönteme bağlı olarak güven aralıklarının hesaplanmasına yönelik yöntem açıklanmıştır.

Özellikle tıbbi bilimlerde çocukların büyüme-gelişme süreçlerinin belirlenmesinde büyüme eğrisi modelleri sıklıkla kullanılmaktadır. Genel olarak büyüme eğrilerinin oluşturulmasında Richards, Gompertz, Lojistik ve Monomoleküler gibi doğrusal olmayan modeller kullanılmıştır. Tanıtılan yöntem ile birlikte bilinen doğrusal olmayan büyüme eğrilerini inceleyen çok fazla çalışma literatürde bulunmamaktadır. Bu nedenle ilerdeki incelemelerde doğrusal olmayan modeller ile açıklanan yöntemin tahmin sonuçlarının değerlendirilmesine yönelik kapsamlı çalışmaların yapılmasına ihtiyaç vardır. İlgili yöntem sonraki çalışmaların yapılabilmesine ilişkin bilimsel detayları sunmaktadır. Gelişen bili-

TABLO 2: Polinomun katsayıları.

Polinomun derecesi	Katsayı	Polinomun derecesi	Katsayı
0	0.4	9	656370
1	1.7	10	-873215.2
2	54.4	11	778282.4
3	-272	12	-404695.2
4	952	13	17612
5	-618.8	14	154292
6	-17321.6	15	-123558.72
7	106964	16	44622.11
8	-333047	17	-6578.11

şim teknolojilerine paralel olarak, söz konusu yöntemin geliştirilmesi mümkün olabilir.

SONUÇ

Yapılan incelemede büyüme eğrilerinde polinomsal bir yaklaşım kullanılarak tahmin yapılmaya çalışılmıştır. Söz konusu veride açıklanan yöntem ile hesaplanan hata kareler toplamı, Richards, Gompertz, Lojistik ve Monomoleküler modelleri için hesaplanan değerlerden daha küçüktür. Bu yaklaşım hata kareler toplamını bilinen yaklaşımlardan daha minimum elde edebilir. Ayrıca tahmin değerleri için güven aralıkları da hesaplanabilmektedir. Şöyle ki; tahmin polinomu ile gözlem değerleri arasındaki fark aşağıdaki üst sınıra sahiptir:[4]

$$\left\| \hat{A}(x) - Y \right\| \leq (3/2)\, w(1/\sqrt{n-1})\,. \qquad (5)$$

Burada n gözlem sayısı ve ile verilen fonksiyon ardışık gözlem değerleri arasındaki farkların minimumunu göstermektedir. Böylelikle incelenen örnekten aşağıdaki eşitsizlik bulunur:[5,6]

$$\left\| \hat{A}(x) - Y \right\| \leq 1.2 \qquad (6)$$

Bu ise tahmin değerleri ile gözlem değerleri arasındaki farkların 1.2'den küçük olması gerektiğini göstermektedir. Böylelikle oluşturulacak olan güven aralığı $0<\alpha<1$ olmak üzere;

$$P(y - 1.2\alpha \leq \hat{A}(x) \leq y + 1.2\alpha) = \alpha \qquad (7)$$

biçiminde olur.

Sonuç olarak; elde edilen tahmin değerleri güven seviyesinde $(y\text{-}1.2\alpha, y+1.2\alpha)$ aralığında olacaktır.

KAYNAKLAR

1. Lindsey JK. Nonlinear Models in Medical Statistics. Oxford Statistical Science Series. 2nd revised ed. Oxford: Oxford University Press; 2001. p.280.
2. Saff EB, Totik V. Polynomial approximation of piecewise analytic functions. J London Math Soc 1989;39(2):487-98.
3. Bernstein SN. [Demonstration of the Weiertrass theorem for the calculation of probabilities]. Commun Soc Math Kharkov 1912-1913; 13(2):1-2.
4. Öner Y, Gürcan M, Halisdemir N. On continuous deformation of richards family. Int J Pure Appl Math 2005;18(3):375-7.
5. Gürcan M, Öner Y. On the existence problem in logistic regression models by altenative form. Adv Appl Stat 2001;1(2):165-74.
6. Bruce MB, Chen SX. Beta-Bernstein smoothing for regression curves with compact support. Scand J Stat 1999;26(1):47-59.
7. Kazarian M. Thom polynomials for Lagrange, Legendre and critical point function singularities. Proc London Math Soc 2003;86(3):707-3.
8. Michel TR, Foley DK. Social security in classical growth model. Camb J Econ 2004;28(1): 1-20.
9. Sievanen R, Lindner M, Makela A, Lasch P. Volume growth and survival graphs: a method for evaluating process-based forest growth models. Tree Physiol 2000;20(5-6): 357-65.
10. Mathieu A, Cournede PH, Letord V, Barthelemy D, de Reffye P. A dynamic model of plant growth with interactions between development and functionals mechanisms to study plant structural plasticity related to trophic competition. Ann Bot (Lond) 2009;103(8):1173-86.
11. Lavoie M. The Kaleckian model of growth and distribution and its neo-Ricardian and neo-Marxian critiques. Camb J Econ 1995;19(6): 789-818.