

Farklı Şekil Parametrelerine Göre Gamma Dağılımına Box-Cox Dönüşümünün Uygulanmasının İncelenmesi: Analitik Araştırma

An Investigation of the Application of the Box-Cox Transformation to the Gamma Distribution Based on Different Shape Parameters: Analytical Research

Arda UZUNOĞLU^a

^aSerbest, Kocaeli, Türkiye

ÖZET Amaç: Bu çalışmada, parametrik istatistiksel yöntemlerin doğru ve güvenilir sonuçlar verebilmesi için temel varsayımlardan biri olan normal dağılım koşulunun sağlanması incelenmiştir. Normal dağılım varsayımını karşılamayan verilerde, bu koşulu sağlamak amacıyla veri dönüşümüne ihtiyaç duyulmuştur. Bu bağlamda, verilerin dağılım yapısını normal dağılıma yaklaştırmak ve istatistiksel analizlerin güvenilirliğini artırmak için Box-Cox dönüşüm yöntemi uygulanmıştır. **Gereç ve Yöntemler:** Gamma dağılımına sahip, 3 farklı rastgele veri seti üretilmiştir. Bu veriler, normal dağılım varsayımını karşılamadığında, parametrik testlerin temel koşullarını sağlamak amacıyla Box-Cox dönüşüm yöntemi uygulanmış ve dönüşüm parametresi olan λ değerleri maksimum log-olabilirlik yöntemiyle belirlenmiştir. **Bulgular:** Gamma dağılımı kullanılarak elde edilen 3 farklı veri seti, normal dağılım varsayımını sağlamamış ve sağa çarpık bir yapı sergilemiştir. Bu veri setlerinde çarpıklık düzeyleri sırasıyla şiddetli, orta ve hafif olarak gözlemlenmiştir. Verilerin normal dağılıma yaklaştırılması amacıyla Box-Cox dönüşüm yöntemi uygulanmış ve her bir veri seti için dönüşüm parametresi olan λ (lambda) değerleri belirlenmiştir (sırasıyla 0,262; 0,343 ve 0,262). Dönüşüm sonrasında yapılan analizler, tüm veri setlerinin normal dağılım varsayımını sağladığını göstermiştir. **Sonuç:** Box-Cox dönüşümü, özellikle pozitif ve sürekli verilerde çarpıklığı azaltmak için kullanılan etkili bir yöntemdir. Bu dönüşüm sayesinde veriler daha simetrik hâle gelir ve normal dağılıma daha uygun bir yapı kazanır. Bu nedenle çeşitli veri setlerinde gözlemlenen çarpıklığın etkin şekilde giderilmesi ve normal dağılım varsayımının sağlanmasında önemli bir yöntemdir.

ABSTRACT Objective: This study investigates the fulfillment of the normality assumption, a fundamental prerequisite for the validity and reliability of parametric statistical methods. In cases where data do not satisfy this assumption, data transformation becomes necessary to achieve normality. In this context, the Box-Cox transformation method was applied to approximate the distribution structure of the data to a normal distribution and to increase the reliability of the statistical analyses. **Material and Methods:** Three different random data sets following a gamma distribution were generated. Since these data sets did not meet the normality assumption, the Box-Cox transformation method was applied to satisfy the fundamental requirements of parametric tests. The transformation parameter λ was estimated using the maximum log-likelihood method. **Results:** Three distinct data sets generated using the gamma distribution did not satisfy the normality assumption and exhibited right-skewed distributions. The levels of Skewness in these data sets were observed to be severe, moderate, and mild, respectively. To bring the distributions closer to normality, the Box-Cox transformation method was applied, and the transformation parameter λ (lambda) was estimated for each data set (0.262, 0.343, and 0.262, respectively). Subsequent analyses demonstrated that, following the transformation, all data sets met the normality assumption. **Conclusion:** The Box-Cox transformation is an effective method used primarily to reduce Skewness in positive and continuous data. This transformation helps make the data more symmetric and better conform to a normal distribution. Therefore, it is an important technique for effectively correcting Skewness observed in various datasets and ensuring the assumption of normality is met.

Anahtar kelimeler: Box-Cox dönüşümü; gamma dağılımı; λ parametresi

Keywords: Box-Cox transformation; gamma distribution; λ parameter

KAYNAK GÖSTERMEK İÇİN:

Uzunoglu A. Farklı şekil parametrelerine göre gamma dağılımına Box-Cox dönüşümünün uygulanmasının incelenmesi: Analitik araştırma. Türkiye Klinikleri J Biostat. 2025;17(2):104-12.

Correspondence: Arda UZUNOĞLU
Serbest, Kocaeli, Türkiye
E-mail: arda-uzunoglu@hotmail.com



Peer review under responsibility of Türkiye Klinikleri Journal of Biostatistics.

Received: 11 Aug 2025 **Received in revised form:** 24 Aug 2025 **Accepted:** 25 Aug 2025 **Available online:** 08 Sep 2025

2146-8877 / Copyright © 2025 by Türkiye Klinikleri. This is an open access article under the CC BY-NC-ND license (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

Rassal değişken, bir deneyin tüm olası sonuçlarını sayılarla ifade eden bir fonksiyondur. Sürekli rassal değişkenler genellikle parametrik dağılımlarla modellenir. Bunlardan en yaygın olarak kullanılan dağılımlar Weibull, gamma, üstel ve log-normal (log-normal) dağılımlarıdır. Weibull dağılımı, Weibull tarafından malzeme ömrünü modellemek için geliştirilmiş ve zamanla mühendislik ve biyoloji gibi alanlarda kullanılmıştır.¹ Log-normal dağılım, pozitif rassal değişkenlerin çarpımlarının modellenmesinde kullanılır ve mühendislikten ekonomiye kadar pek çok alanda tercih edilmektedir. Üstel dağılım, bir olayın gerçekleşmesine kadar geçen süreyi modellemek için kullanılır.^{2,3} Gamma dağılımı, üstel dağılımın daha genel bir şekli olup, literatürde ilk olarak malzeme ömrünün istatistiksel olarak modellenmesinde kullanılmıştır.⁴ Günümüzde özellikle güvenilirlik ve sağkalımı analizlerinde yaygın olarak kullanılmaktadır.⁵

Parametrik testlerin uygulanabilmesi için verilerin normal dağılım varsayımını sağlaması gerekir. Ancak bazı değişkenlerin bu varsayımı sağlamaması durumunda, verilerin yapısal özelliklerine göre uygun dönüşümler uygulanarak normal dağılıma daha yakın bir yapı elde edilebilir. Veri dönüşümü, veriyi “farklı bir biçimde yeniden ifade etmek” anlamına gelir. Bu dönüşümler, özellikle çarpık dağılımların simetrik hâle getirilmesinde önemli rol oynar.⁶ Bu kapsamda sıkça başvuru alan veri dönüşüm yöntemleri arasında logaritmik, karekök, üstel ve Box-Cox dönüşümleri yer alır. Örneğin, dağılım ılımlı (hafif) derecede pozitif çarpık ise karekök dönüşümü, şiddetli (yoğun) pozitif çarpıklık durumunda ise logaritmik dönüşüm önerilir.^{6,7} Box-Cox dönüşümü ise daha esnek yapısıyla veriyi normal dağılıma yaklaştırmak amacıyla kullanılan üstel dönüşüm grubuna ait parametrik bir yöntemdir. Box-Cox güç dönüşümü, Box ve Cox tarafından önerilmiştir. Bu yöntem önerildiğinden beri birçok alanda uygulanmıştır.⁷ Son dönem çalışmalara örnek olarak Lee ve ark., Gillard ile Sun ve ark. gösterilebilir.^{5,8,9} Box-Cox dönüşümü, ham verilere belirli bir güç fonksiyonu uygulayarak gerçekleştirilir ve bu işlemde dönüşüm parametresi olan λ 'nın tahmini oldukça önemlidir. Yöntemin orijinalinde, λ parametresi maksimum olabilirlik tahmini ile hesaplanmaktadır. Alternatif yaklaşımlar arasında Rahman, Rahman ve Pearson ile Dag ve ark. tarafından geliştirilen yöntemler yer almaktadır.¹⁰⁻¹²

Bu çalışmada, sabit ölçek parametresi altında farklı şekil parametrelerine sahip gamma dağılımına ait rassal bir veri setleri türetilmiştir. Elde edilen veriler normal dağılıma uygunluk göstermemesi durumunda, parametrik testlerin temel varsayımlarını sağlamak amacıyla Box-Cox dönüşüm yöntemi uygulanmıştır. Veri dönüşümü, analiz sonuçlarının istatistiksel geçerliliğini ve güvenilirliğini artırmayı amaçlamaktadır.

GEREÇ VE YÖNTEMLER

Araştırmada insan, hayvan ya da canlı materyali kullanılmadığı için etik kurul onayı gerekmemektedir.

Çalışmamızda, farklı çarpıklık düzeylerine sahip dağılımlardan veri üretmek amacıyla gamma dağılımı kullanılmıştır. Bu doğrultuda 3 farklı dağılım senaryosu tanımlanmıştır. Tüm senaryolarda ölçek parametresi sabit tutulmuş ($\beta=3$) olup, şekil parametresi (α) sırasıyla 1, 2 ve 5 olarak belirlenmiştir. $\alpha=1$ durumunda dağılım üstel dağılıma olup şiddetli sağa çarpık bir dağılımdır. $\alpha=2$ için çarpıklık azalarak orta düzeye inmekte ve $\alpha=5$ durumunda ise dağılım daha simetrik bir yapıya yaklaşmaktadır. Bu şekilde, farklı çarpıklık seviyelerine sahip 3 ayrı veri seti oluşturulmuştur. Gamma dağılımında, her bir parametre için rastgele 1.000 veri türetilmiştir. Bu verilerin normal dağılıma yakınlaştırmak amacıyla Box-Cox dönüşümü uygulanmıştır. Box-Cox dönüşüm parametresi λ , maksimum log-olabilirlik yöntemiyle tahmin edilmiştir. Dönüşüm sonrası verilerin normalliği değerlendirilmiştir.

Verilerin normalliği, Shapiro-Wilk testi ile değerlendirilmiştir. İstatistiksel anlamlılık düzeyi $\alpha=0,05$ olarak belirlenmiştir. R 4.4.3 (R Core Team, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria) açık kaynak kodlu programında “MASS” paketleri kullanılarak yapılmıştır.

GAMMA DAĞILIMI

İki parametrelili sürekli bir dağılım olan gamma dağılımı, pozitif çarpıklık katsayısı nedeniyle sağa çarpık bir dağılım özelliği gösterir. Mühendislik, tıp, sismoloji, hidroloji ve güvenilirlik gibi birçok endüstriyel alanda yaygın uygulamalara sahiptir.¹³ Burada dağılımın şekil parametresini α , β ise dağılımın ölçek parametresini ifade eder. Gamma dağılımına sahip bir X rasgele değişkeni için gamma fonksiyonu eşitlik 1’de verilmiştir.¹⁴

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-x/\beta} \cdot \frac{1}{\beta} dx \quad (1)$$

Olasılık yoğunluk fonksiyonu eşitlik 2’de verilmiştir.¹⁴

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, \quad x > 0, \alpha > 0, \beta > 0 \quad (2)$$

Şekil parametresi α ’nın farklı değerleri için gamma dağılımının bazı özel durumları aşağıda belirtilmiştir.¹⁴

- $0 < \alpha < 1$ iken gamma dağılımı x ve y eksenlerine asimptottur.
- $\alpha = 1$ iken gamma dağılımı üstel dağılıma dönüşür.
- $1 < \alpha < 2$ iken gamma dağılımının 1 tepe noktası ve bu tepe noktasının sağ tarafında 1 dönüm noktası vardır.
- $\alpha \rightarrow \infty$ iken gamma dağılımı simetriktr.
- $\alpha > 2$ iken gamma dağılımı 1 tepe noktasına sahiptir ve bu kez 2 dönüm noktası bulunur.
- r pozitif bir tam sayı olmak üzere $\alpha = r/2$ ve $\beta = 2$ için gamma dağılımı ki-kare (χ^2) dağılımına dönüşür.

BOX-COX DÖNÜŞÜMÜ

Box-Cox dönüşümü, 1964 yılında Box ve Cox tarafından geliştirilmiş λ parametrelili üstel bir yöntemdir. Bu yöntem, λ parametresi kullanılarak verinin normal dağılıma daha uygun hâle getirilmesini amaçlar. Dönüşüm fonksiyonu, eşitlik 3’te verilmiştir.⁷

$$y^{(\lambda)} = \begin{cases} \frac{y^{\lambda}-1}{\lambda}, & \lambda \neq 0 \\ \ln(y), & \lambda = 0 \end{cases} \quad (3)$$

λ parametresi, dönüşüm fonksiyonunun yapısını ve uygulanacak dönüşümün türünü belirlemektedir. λ değerlerine karşılık gelen dönüşüm türleri, [Tablo 1](#)’de verilmiştir.⁷

TABLO 1: λ değerlerine karşılık gelen dönüşüm türleri

λ	Dönüşümler
-1	Ters dönüşüm
0	Logaritmik dönüşüm
0,5	Karekök dönüşümü
1	Dönüşüm uygulanmaz

Pozitif λ değerleri ($\lambda > 0$), sola çarpık dağılımlarda veri yapısını simetrik hâle getirmek amacıyla tercih edilir. Buna karşılık, negatif λ değerleri ($\lambda < 0$), sağa çarpık dağılımların normalleştirilmesinde daha etkilidir. Özellikle $\lambda = 0$ değeri, yani logaritmik dönüşüm, şiddetli sağa çarpıklık içeren veri setlerinde kullanılmaktadır.¹⁵

Normal dağılım varsayımı altında, beklenen değeri $E(y^{(\lambda)})$ ve varyansı σ^2 olan dönüştürülmüş $y^{(\lambda)}$ değerlerinin olabilirlik fonksiyonu eşitlik 4 ile ifade edilmiştir.⁷

$$L(\lambda, \theta, \sigma^2) = \left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sigma^n} \right) \cdot \exp \left(-\frac{(y^{(\lambda)} - a\theta)'(y^{(\lambda)} - a\theta)}{2\sigma^2} \right) \cdot J(\lambda; y) \quad (4)$$

y : Orijinal gözlenen vektör ($n \times 1$)

$y^{(\lambda)}$: Dönüştürülmüş gözlenen vektör

$E(y^{(\lambda)}) = a\theta$: Dönüştürülmüş gözlenen vektörün beklenen değer vektörü

Burada, $J(\lambda; y)$, dönüşümün Jacobian determinanı eşitlik 5'te verilmiştir.⁷

$$J(\lambda; y) = \prod_{i=1}^n \left| \frac{dy_i^{(\lambda)}}{dy_i} \right| \quad (5)$$

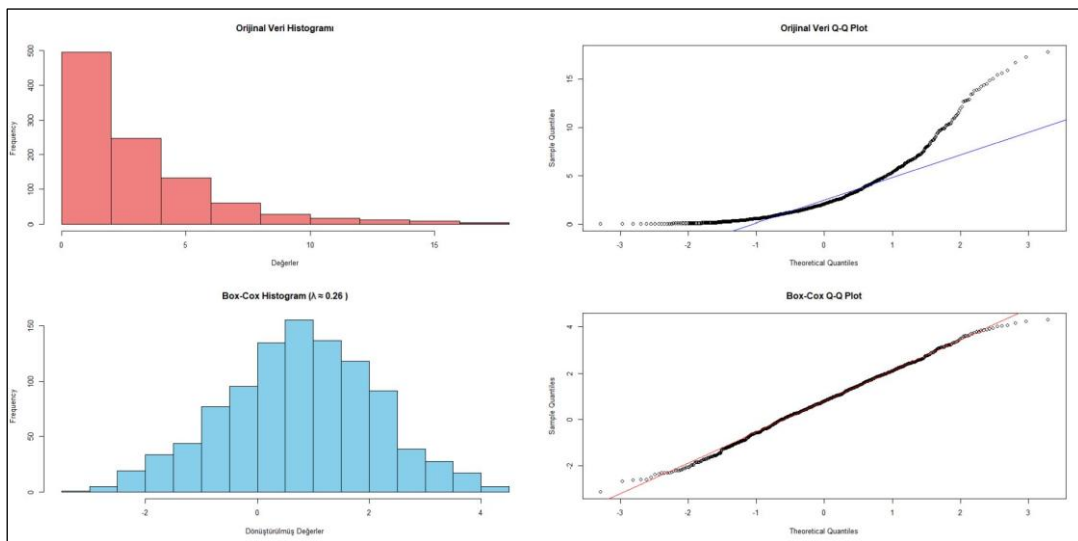
Eşitlik 6'daki maksimum log-olabilirlik değerini hesaplamak için Eşitlik 4'te tanımlanan olasılık fonksiyonunun logaritması alınmıştır.

$$\log L_{max}(\lambda) = -\frac{n}{2} \log(\sigma^2(\lambda)) + \log J(\lambda; y) \quad (6)$$

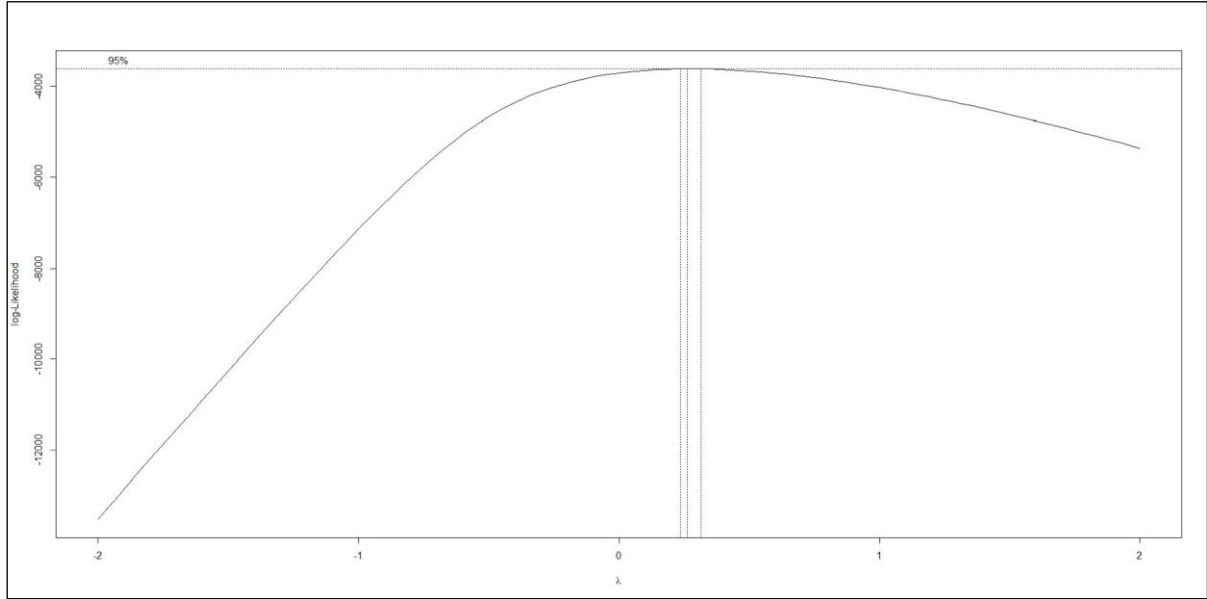
Buradan, eşitlik 5'teki denklem kullanılarak farklı λ değerlerine karşılık gelen log-olabilirlik değerleri hesaplanmaktadır. Bu değerler arasından en büyük log-olabilirlik değerini veren λ değeri, dönüşüm parametresinin en uygun tahmini olarak kabul edilmekte ve $\hat{\lambda}$ ile gösterilmektedir.⁷

BULGULAR

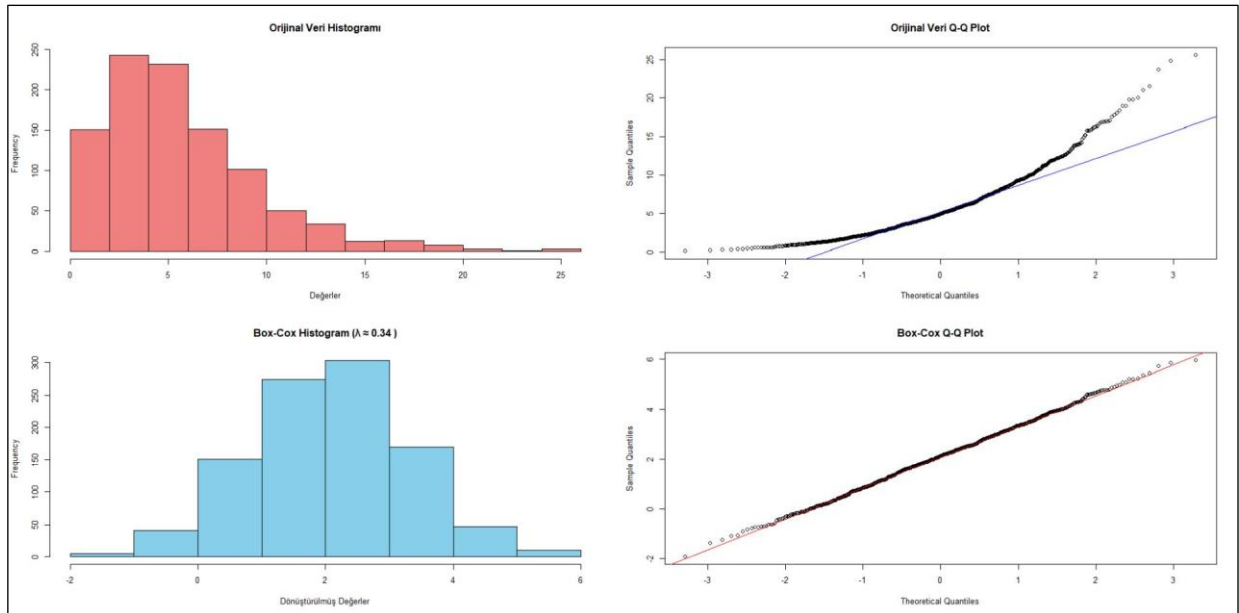
$\alpha=1$ için elde edilen orijinal veri seti şiddetli (yoğun) pozitif çarpıklık göstermektedir. Ancak uygulanan Box-Cox dönüşümü ile çarpıklık önemli ölçüde azaltılmış ve dönüşüm sonrası veri seti normal dağılım varsayımını sağlamıştır ($\lambda=0,262$; $p=0,076$) (Sekil 1, Sekil 2). $\alpha=2$ için orta düzeyde bir sağa çarpıklık (pozitif çarpıklık) gözlemlenmiştir. Ancak Box-Cox dönüşümü bu durumda da başarılı olmuş; Dönüşüm sonrası veri seti, normal dağılım varsayımını sağlamıştır ($\lambda=0,343$; $p=0,936$) (Sekil 3, Sekil 4). $\alpha=5$ durumunda, orijinal veri seti hafif düzeyde çarpıklık göstermekte olup uygulanan Box-Cox dönüşümünün ardından çarpıklık ortadan kalkmış ve veri seti normal dağılım varsayımını sağlamıştır ($\lambda=0,262$; $p=0,488$) (Sekil 5, Sekil 6). Bu durum, dönüşümün bu senaryo özelinde oldukça başarılı bir sonuç verdiğini göstermektedir.



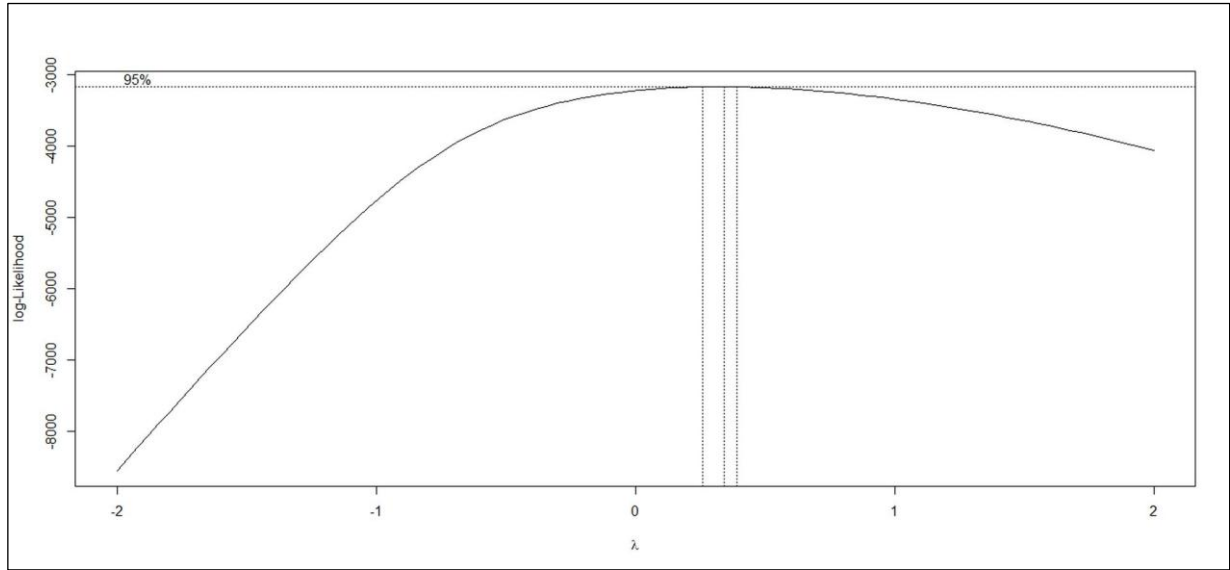
ŞEKİL 1: Histogram ve Q-Q grafiği: $\alpha=1$ ve $\beta=3$ iken orijinal ve Box-Cox dönüştürülmüş veriler



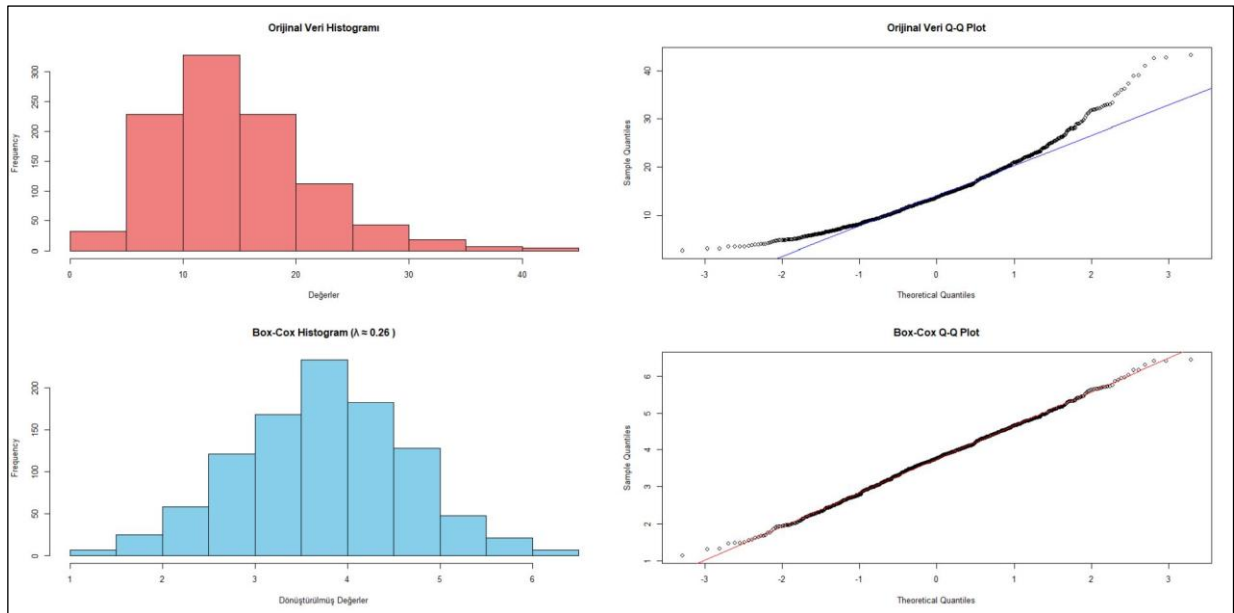
ŞEKİL 2: $\alpha=1$ ve $\beta=3$ için lambda değerlerine göre log-olabilirlik değişimi



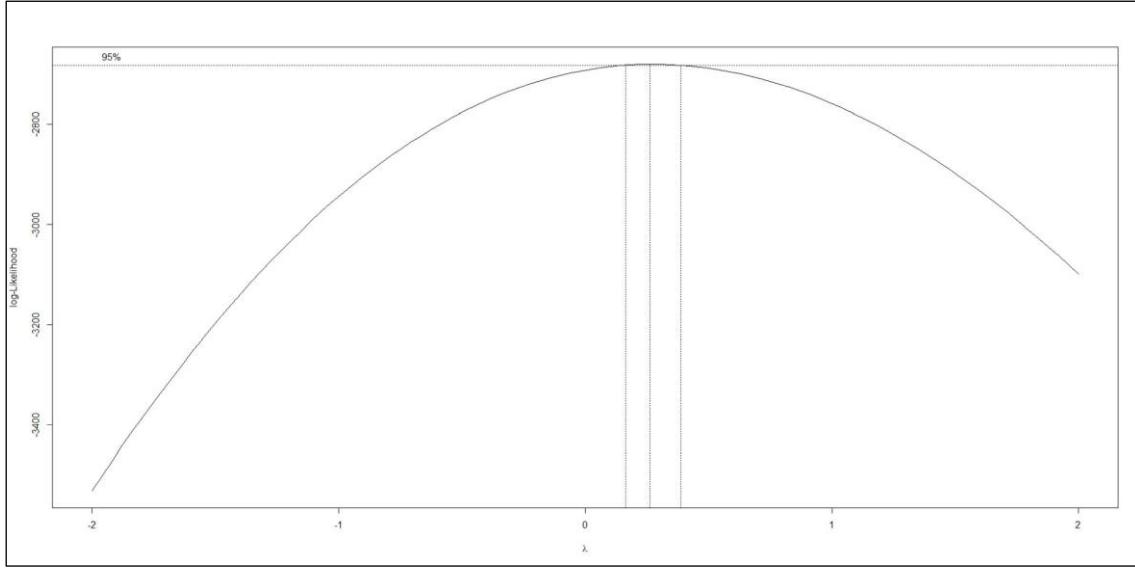
ŞEKİL 3: Histogram ve Q-Q grafiği: $\alpha=2$ ve $\beta=3$ iken orijinal ve Box-Cox dönüştürülmüş veriler



ŞEKİL 4: $\alpha=2$ ve $\beta=3$ için lambda değerlerine göre log-olabilirlik değişimi



ŞEKİL 5: Histogram ve Q-Q grafiği: $\alpha=5$ ve $\beta=3$ iken orijinal ve Box-Cox dönüştürülmüş veriler



ŞEKİL 6: $\alpha=5$ ve $\beta=3$ için lambda değerlerine göre log-olabilirlik değişimi

Sabit ölçek parametresi altında farklı şekil parametrelerine sahip gamma dağılımından farklı çarpıklık düzeylerine sahip 3 veri seti türetilmiştir. Box-Cox dönüşümü uygulanarak her üç senaryoda da dönüşüm sonrası normallik varsayımı sağlanmıştır. Özellikle çarpıklığın yüksek olduğu $\alpha=1$ ve $\alpha=2$ durumlarında dönüşüm belirgin iyileşme sağlamıştır, $\alpha=5$ için ise hafif çarpıklık tamamen giderilmiştir. Bu sonuçlar, Box-Cox dönüşümünün farklı çarpıklık seviyelerinde etkili bir yöntem olduğunu göstermektedir.

TARTIŞMA

Gamma dağılımı, sürekli rassal değişkenlerin tahmini için kullanılan uygun bir olasılık modelidir. Bu dağılım, özellikle değeri zamanla değişen ve önceden kesin olarak tahmin edilemeyen süreçlerin analizinde kullanılır. Olasılık kuramı, bu tür rassal olayların matematiksel temellerini inceler; çünkü bir olay gerçekleşmeden önce sonucunun hangi değeri alacağı bilinemez, ancak sonuçlar belirli bir olasılık yapısı çerçevesinde rastlantısal olarak ortaya çıkar.¹⁶ Gamma dağılımları oldukça işlevseldir ve birçok fiziksel durumu anlamlı şekilde temsil edebilir. Özellikle güvenilirlik analizinde en çok kullanılan istatistiksel dağılımlardan biri olarak öne çıkar. Sistem ya da bileşenlerin belirli bir süre içinde arıza verme olasılığını, modelleme süreçlerinde yaygın biçimde kullanılmaktadır.¹⁷ Bununla birlikte gamma dağılımı sadece mühendislik ve teknik uygulamalarla sınırlı değildir. İklim biliminde, özellikle de belirli bir bölgedeki günlük yağış miktarlarının modellenmesi açısından önemli bir yere sahiptir.^{18,19} Son yıllarda ise sağkalım analizlerinde yaygın olarak kullanılmaktadır.⁵

Box ve Cox çalışmasında, önerilen Box-Cox dönüşüm yöntemi kullanılarak tekstil deneyine ait verileri incelenmiştir. Ham verilerde sağa çarpıklık gözlenmiş ve normal dağılım varsayımı sağlanmamıştır. Uygulanan Box-Cox dönüşüm analizi sonucunda, dönüşüm parametresi $\lambda=0$ olarak bulunmuş ve bu doğrultuda logaritmik dönüşüm uygulanmıştır. Uygulanan dönüşüm ile veri dağılımının simetrikleştigi ve normal dağılım varsayımına uygun hâle geldiği gözlemlenmiştir.⁷

Asar ve ark. tarafından yapılan çalışmada, Box-Cox dönüşüm yöntemleri 2 farklı gerçek veri setine uygulanmıştır. İlk veri seti, “International Wool Textile Organization” tarafından toplanan 27 gözlemden olu-

şan tekstil verisi olup sağa çarpık bir dağılım göstermektedir. Negatif λ değerleri kullanılarak yapılan dönüşüm, normallik testlerinde başarılı sonuçlar vermiştir. İkinci veri seti ise Orta Doğu Teknik Üniversitesinden 42 öğrencinin notlarını içeren öğrenci notları verisidir. Bu veri sola çarpık bir dağılıma sahip olduğundan pozitif λ değerleriyle dönüştürülmüş ve normal dağılıma yakınlştırılmıştır. Bu bulgular, λ parametresinin sadece dönüşüm türünü değil, aynı zamanda verinin yapısal çarpıklığını düzeltmede yönlendirici bir rol oynadığını göstermektedir.¹⁵

Bu literatürden yola çıkarak yaptığımız çalışmamızda, sabit ölçek parametresi altında farklı şekil parametrelerine sahip gamma dağılımından türetilmiş 3 farklı çarpıklık seviyesine sahip veri seti üzerinde Box-Cox dönüşümü uygulanmıştır. Analiz sonucunda her üç senaryoda da dönüşüm sonrası normal dağılıma uygunluk sağlanmış ve özellikle çarpıklığın şiddetli olduğu durumlarda belirgin bir iyileşme elde edilmiştir. Orta düzeyde çarpıklık gösteren senaryoda veri normalleştirilmiş, hafif çarpıklık gösteren senaryoda ise çarpıklık tamamen ortadan kaldırılmış ve veri normalleştirilmiştir. Bu bulgular, Box-Cox dönüşümünün yalnızca dağılımın simetrisini iyileştirmediğini, aynı zamanda istatistiksel analizlerin güvenilirliğini artırdığını ortaya koymaktadır.

Box ve Cox tarafından önerilen Box-Cox dönüşüm yöntemi, çeşitli veri setlerinde çarpıklığın giderilmesi ve normal dağılım varsayımının sağlanmasında oldukça etkili bir yöntem olarak literatürde geniş yer bulmuştur.⁷

SONUÇ

Box-Cox dönüşümü, sabit ölçek parametresi altında farklı şekil parametrelerine sahip gamma dağılımlarından türetilmiş verilere uygulanmış ve normal bir dağılım elde edilmiştir. Dönüşüm parametresi, uygulanan veri setleri için uygun şekilde belirlenmiş ve çarpıklığın azaltılmasında etkili olmuştur. Elde edilen bulgular, özellikle parametrik testlerde aranan normallik varsayımının sağlanması açısından Box-Cox dönüşümünün oldukça başarılı bir yöntem olduğunu göstermektedir.

Finansal Kaynak

Bu çalışma sırasında, yapılan araştırma konusu ile ilgili doğrudan bağlantısı bulunan herhangi bir ilaç firmasından, tıbbi alet, gereç ve malzeme sağlayan ve/veya üreten bir firma veya herhangi bir ticari firmadan, çalışmanın değerlendirme sürecinde, çalışma ile ilgili verilecek kararı olumsuz etkileyebilecek maddi ve/veya manevi herhangi bir destek alınmamıştır.

Çıkar Çatışması

Bu çalışma ile ilgili olarak yazarların ve/veya aile bireylerinin çıkar çatışması potansiyeli olabilecek bilimsel ve tıbbi komite üyeliği veya üyeleri ile ilişkisi, danışmanlık, bilirkişilik, herhangi bir firmada çalışma durumu, hissedarlık ve benzer durumları yoktur.

Yazar Katkıları

Bu çalışma tamamen yazarın kendi eseri olup başka hiçbir yazar katkısı alınmamıştır.

KAYNAKLAR

1. Weibull W. A statistical distribution function of wide applicability. Journal of Applied Mechanics. 1951;18(3):293-7. [\[Crossref\]](#)
2. Lawless JF. Statistical Models and Methods for Lifetime Data. 2nd ed. New York: John Wiley&Sons; 2003.
3. Hahn GJ, Shapiro SS. Statistical Models in Engineering. 1st ed. New York: John Wiley&Sons. 1967.
4. Birnbaum ZW, Saunders SC. A statistical model of life length of materials. Journal of the American Statistical Association. 1958;53(281):151-60. [\[Crossref\]](#)
5. Lee ET, Wang JW. Statistical Methods for Survival Data Analysis. 3rd ed. New York: John Wiley&Sons, Inc; 2003. [\[Crossref\]](#) [\[PubMed\]](#)
6. Alpar R. Uygulamalı İstatistik ve Geçerlilik-Güvenirlik. 6. Baskı. Ankara: Detay Publishing; 2020.
7. Box GEP, Cox DR. An analysis of transformations. Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological). 1964;26(2):211-43. [\[Crossref\]](#)

8. Gillard J. A generalised Box-Cox transformation for the parametric estimation of clinical reference intervals. *Journal of Applied Statistics*. 2012;39(10):2231-45. [\[Crossref\]](#)
9. Sun L, Tong X, Zhou X. A class of Box-Cox transformation models for recurrent event data. *Lifetime Data Anal*. 2011;17(2):280-301. [\[Crossref\]](#) [\[PubMed\]](#)
10. Rahman M. Estimating the Box-Cox transformation via Shapiro-Wilk W statistic. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*. 1999;28(1):223-41. [\[Crossref\]](#)
11. Rahman M, Pearson LM. Anderson-Darling statistic in estimating the Box-Cox transformation parameter. *Journal of Applied Probability & Statistics*. 2008;3(1):45-57. [\[Link\]](#)
12. Dag O, Asar O, İlk O. A methodology to implement Box-Cox transformation when no covariate is available. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*. 2014;43(7):1749-59. [\[Crossref\]](#)
13. Shapiro SS, Chen L. Composite tests for the gamma distribution. *Journal of Quality Technology*. 2001;33(1):47-59. [\[Crossref\]](#)
14. Yüzer AF. Olasılık ve İstatistik. 1. Baskı. Eskişehir: Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları; 1996.
15. Asar Ö, İlk O, Dag O. Estimating Box-Cox power transformation parameter via goodness-of-fit tests. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*. 2017;46(1):91-105. [\[Crossref\]](#)
16. Grimett, GR, Stirzaker DR. Probability and Random Processes. 3rd ed. United Kingdom: Oxford University Press; 2001. [\[Crossref\]](#)
17. Saralees N. Some gamma distributions, statistics. *A Journal of Theoretical and Applied Statistics*. 2008;42:1:77-94. [\[Crossref\]](#)
18. Das SC. Fitting truncated Type III curves to rainfall data. *Australian Journal of Physics*. 1955;8:298-304. [\[Crossref\]](#)
19. Stephenson DB, Kumar KR, Doblas-Reyes FJ, Chauvin E, Pezzulli S. Extreme daily rainfall events and their impact on Ensemble Forecast of the Indian Monsoon. *Monthly Weather Review*. 1999;127(9):1954-66. [\[Crossref\]](#)